Ein Beitrag zur Theorie der geometrischen Konstruktionen.

Von RICHARD OBLÁTH in Budapest.

Die Reduktion der zur Ausführung der geometrischen Konstruktionen notwendigen Hilfsmittel beschäftigt die Geometer schon seit Jahrhunderten. Schon die Mathematiker der Renaissance trachteten die Konstruktionen mit einer einzigen Zirkelöffnung zu vollziehen. MOHR („Euclides Danicus") und MASCHERONI („Geometria del compasso") lösten die quadratischen Aufgaben mit dem Zirkel allein. PONCELET und STEINER haben bewiesen, daß das blosse Lineal zur Ausführung sämtlicher quadratischen Konstruktionen ausreicht, wenn ein fester Kreis mit seinem Mittelpunkte gezeichnet vorliegt. D. HILBERT hat in seinen Vorlesungen gezeigt, daß der Mittelpunkt unentbehrlich ist. Das gilt — wie D. CAUER bewiesen hat [1]) — selbst für zwei ausserhalb einander liegende Kreise. CAUER zeigte zugleich, daß zwei sich schneidende (bzw konzentrische), oder drei beliebig gegebene Kreise die Kenntnis des Mittelpunktes ersetzen. F. SEVERI [2]) und unabhängig von ihm mehrere andere Forscher (undzwar Verfasser und GY. SZ.-NAGY in vollständig elementarer Weise) haben bewiesen, daß statt des STEINERschen Kreises ein beliebig kleiner Bogen genügt. YANAGIHARA [3]) reduzierte in diesem Sinne auch die CAUERschen Sätze.

In der vorliegenden Note geben wir eine weitere Reduktion an, denn wir beweisen den folgenden

Satz. *Zur linearen Ausführung sämtlicher quadratischen Konstruktionen genügt ein beliebig kleiner Kreisbogen, wenn an demselben beide Drittelungspunkte bezeichnet sind.*

---

1) D. CAUER, Über die Konstruktion des Mittelpunktes eines Kreises mit dem Lineal allein, *Math. Annalen*, **73** (1913), S. 90—94; Berichtigung, *Ebenda*, **74** (1913), S. 462—464.

2) F. SEVERI, Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso, *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, **18** (1904), S. 256; R. OBLÁTH, Bemerkungen zur Theorie der geometrischen Konstruktionen, *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, **26** (1915), S. 295—298; GY. (J.) SZ.-NAGY, Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen, *The Tôhoku Math. Journal*, **40** (1934), S. 76—78.

3) K. YANAGIHARA, Note on the construction problems in elementary geometry, *The Tôhoku Math. Journal*, **24** (1925), S. 125—127.

Aus den aufgezählten Ergebnissen erhellt, daß der Beweis durch die lineare Konstruktion des Kreismittelpunktes geleistet ist. Wir benützen den elementaren Satz, wonach die Verbindungslinie des Schnittpunktes zweier Kreistangenten mit dem Halbierungspunkte des Bogens zwischen den Berührungspunkten ein Durchmesser des Kreises ist.

PP' sei der vorgegebene Kreisbogen, und P_1, P_2 die beiden Drittelungspunkte von P aus gerechnet. Zur linearen Konstruktion der Tangente genügt auf Grund des Pascalschen Satzes die Kenntnis von 5 Peripheriepunkten. Die Mittelpunkte der Bogen PP_2 und P_1P' sind P_1 bzw. P_2. Die Tangenten in den Punkten P, P_1, P_2, P' lassen sich also linear konstruieren. Wenn der Schnittpunkt der Tangenten in P und P_2 mit Q_1, derjenigen in P_1 und P' mit Q_2 bezeichnet wird dann sind die Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 Durchmesser des Kreises, ihr Schnittpunkt ist mithin der gesuchte Kreismittelpunkt.

In diesem Zusammenhange wollen wir noch eine Bemerkung machen. Gy. Sz.-Nagy[4]) erwähnt in seiner ausgezeichneten Monographie, daß Hjelmslev die Geldmünze, d. h. Kreisperipherie, deren Mittelpunkt unbekannt ist als Konstruktionsmittel benützt, und fügt hinzu, daß man mit diesem Mittel viele quadratische Konstruktionen ausführen kann, aber nicht alle. Wenn aber neben der Münze auch der Gebrauch des Lineals gestattet ist, dann genügen diese Hilfsmittel zur Konstruktion *sämtlicher* quadratischen Aufgaben. Es genügt sogar ein Bruchstück der Münze, wenn nur ein beliebig kleines Stück der Peripherie unversehrt ist. Den Beweis ergibt der bereits angeführte Satz von Yanagihara, da die Kenntnis zweier sich schneidender Kreisbogen den Mittelpunkt ersetzen kann. Man darf dann sogar auf den ferneren Gebrauch der Münze verzichten.

(Eingegangen am 24. März 1951.)

[4]) Szőkefalvi-Nagy Gyula, *A geometriai szerkesztések elmélete* (Kolozsvár, 1943), S. 31; J. Hjelmslev, Konstruktion ved Passer med fast Indstilling, uden Brug af Lineal, *Mat. Tidskrift*, A 1938, S. 77—85.